Heinrich-Heine-Universität
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

Sommersemester 2017
19.07.2017

Lineare Algebra I
Probeklausur

Die Klausur dauert zwei Stunden.

Sie besteht aus 6 Aufgaben.

Jede Aufgabe wäre jeweils 10 Punkte wert.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -13 \\
4x_1 - 8x_2 - 16x_3 - 23x_4 &= 27 \\
3x_1 - 10x_2 \phantom{{}-16x_3} - 5x_4 &= 26 \\
x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 &= 14
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2

Sei f der bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix definierte Endomorphismus des $\mathbb{F}_5$-Vektorraums $(\mathbb{F}_5)^3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_f von f.
(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von f.
(c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenräume von f.
(d) Ist f diagonalisierbar?

Aufgabe 3

Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad\qquad V := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' geordnete Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' geordnete Basen sind von V:

$$B := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad\qquad C := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$B' := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \qquad\qquad C' := (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_C M_B(f) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_{C'}M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind. Pro Aufgabenteil können mehrere Aussagen richtig sein.

Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.

(1) Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ und Teilmengen $A, B \subset M$ gilt stets:

- ☐ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- ☐ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- ☐ $f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$

(2) Eine Abbildung von Mengen $f\colon A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn

- ☐ jede Faser von f aus genau einem Element besteht.
- ☐ jede Faser von f aus höchstens einem Element besteht.
- ☐ alle Fasern von f gleich mächtig sind.

(3) Welche der folgenden „Abbildungen" ist *nicht* wohldefiniert?

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \\ [x] &\mapsto [2x] \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q}\setminus\{0\} &\to \mathbb{Q} \\ \frac{p}{q} &\mapsto \frac{q}{p} \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/10 &\to \mathbb{Z} \\ [x] &\mapsto x \end{aligned}$

(4) Ein *homogenes* Gleichungssystem besitzt

- ☐ immer mindestens eine Lösung.
- ☐ stets unendlich viele Lösungen.
- ☐ eine nicht-triviale Lösung, falls die Anzahl der Variablen größer als die Anzahl der Gleichungen ist.

(5) Ein Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

- ☐ er injektiv ist.
- ☐ seine Determinante $\det f \neq 0$ ist.
- ☐ sein Rang $\mathrm{rk} f \neq 0$ ist.

(6) Die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ ist

- ☐ ein Erzeugendensystem.
- ☐ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
- ☐ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(7) Eine Rotation um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn wird bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch folgende Matrix beschrieben:

☐ $\begin{pmatrix} \pi/4 & 0 \\ 0 & \pi/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$

(8) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ eine quadratische Matrix, für die gilt $A^2 = 0$.

- ☐ Es folgt: A besitzt 0 als einzigen Eigenwert.
- ☐ Es folgt: A besitzt gar keine Eigenwerte.
- ☐ Es folgt keinerlei Aussage über die Eigenwert von A.

Aufgabe 5

Sei V ein Vektorraum mit Untervektorräumen W, V_1 und V_2. Beweisen Sie, dass aus $W \subseteq V_1 \cup V_2$ folgt: $W \subseteq V_1$ oder $W \subseteq V_2$.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Aufgabe 6

Betrachten Sie auf dem Raum aller reellen 2×2-Matrizen $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ die gewöhnliche Addition von Matrizen „+“ und die folgendermaßen definierte Verknüpfung „$*$“:

$$(a_{ij})_{ij} * (b_{ij})_{ij} := (a_{ij}b_{ij})_{ij}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2), +, *)$ ein kommutativer Ring (mit Einselement) ist.

(b) Handelt es sich um einen Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.